



Olimpiada Națională de Matematică 2020

Etapa locală – Iași

CLASA a IX-a

Barem de corectare

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat prin $\frac{a_1}{0!} + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$,

iar $0! = 1$.

a) Determinați termenul general a_n .

b) Demonstrați că $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < 1$.

Soluție și barem:

a) $a_n = (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 3p

$$b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

\vdots

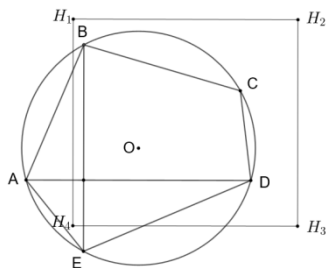
$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} < \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \dots 3p$$

$$\text{Prin adunare se obține } \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \dots 1p$$

Problema 2. Se consideră pentagonul $ABCDE$ înscris în cercul de centru O cu $AD \perp BE$. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE , respectiv ACE , arătați că $H_1 H_2 H_3 H_4$ este dreptunghi.

Soluție și barem:

Utilizând relația lui Sylvester în triunghiurile ABC, BCD, CDE , respectiv ACE ,





se obțin egalitățile
$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{H_1H_2} &= \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{H_4H_3} &= \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{aligned} \right\}$$

Deoarece $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_4H_3} \Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram..... 5p

$$\overrightarrow{H_1H_4} = \overrightarrow{OH_4} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BE},$$

dar $AD \perp BE \Rightarrow H_1H_2 \perp H_1H_4 \Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ dreptunghi..... 2p

Problema 3. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} = [x]^2$, unde $\{y\}$ reprezintă partea fracționară, iar $[y]$ reprezintă partea întreagă a numărului real y .

Soluție și barem:

Înlocuind în relația din enunț partea fracționară obținem

$$x - [x] + x + \frac{1}{3} - \left[x + \frac{1}{3}\right] + x + \frac{2}{3} - \left[x + \frac{2}{3}\right] = [x]^2 \Leftrightarrow 3x + 1 = [x]^2 + [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$$

Din identitatea lui Hermite $\left([x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]\right)$, avem $3x + 1 = [x]^2 + [3x] = k \in \mathbb{Z}$

Deoarece $x = \frac{k-1}{3}$, ecuația devine $k = \left[\frac{k-1}{3}\right]^2 + k - 1 \Leftrightarrow \left[\frac{k-1}{3}\right]^2 = 1$ 3p

Dacă $\left[\frac{k-1}{3}\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{k-1}{3} \in [1, 2) \Leftrightarrow k \in [4, 7)$, dar $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{4, 5, 6\} \Rightarrow x \in \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$ 2p

Dacă $\left[\frac{k-1}{3}\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{k-1}{3} \in [-1, 0) \Leftrightarrow k \in [-2, 1)$, dar $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0\} \Rightarrow x \in \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ 2p

Problema 4. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c care verifică relația $ab + ac + bc = abc$.

a) Demonstrați că $a + b + c \geq 9$.

b) Demonstrați că $(a + b + c)\sqrt{9 + a + b + c} \geq 3\sqrt{6abc}$.

Soluție și barem:

a) Din inegalitatea mediilor $\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \Rightarrow a + b + c \geq \frac{9abc}{ab + ac + bc} \Leftrightarrow a + b + c \geq 9$ 3p

b)
$$\left. \begin{aligned} (a+b+c)^2 \cdot (9+a+b+c) &\geq (a+b+c)^2 \cdot 18 \\ \text{dar } (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+ac+bc) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a+b+c)\sqrt{9+a+b+c} \geq \sqrt{54abc} = 3\sqrt{6abc}$$
..... 4p