Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a VIII-a
Barem de corectare

Problema 1.

a) Dacă $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2=13, c^2+d^2=7$ și $ab=cd=2\sqrt{3},$ să se demonstreze că $\dfrac{11}{|a-b|}+\dfrac{2}{|c+d|}\in\mathbb{Q}.$

(*Dorel Luchian*)

b) Se consideră fracția $F(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x+1}{2x^3-3x^2+3x-1},$ unde $x\in\mathbb{Z}.$

i) Arătați că $F(x)$ se poate simplifica prin numărul $x^2-x+1.$

ii) Determinați valorile lui $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $F(x)\in\mathbb{Z}.$

(*Remus Nechita*)

Soluție și barem:

a) $(a-b)^2=13-4\sqrt{3}=\left(2\sqrt{3}-1\right)^2,\ (c+d)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ 2p

$\dfrac{11}{|a-b|}+\dfrac{2}{|c+d|}=\dfrac{11}{2\sqrt{3}-1}+\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+1+4-2\sqrt{3}=5\in\mathbb{Q}.$ 2p

b) i) $F(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x+1}{2x^3-3x^2+3x-1}=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2-x+1\right)(2x-1)}=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ 2p

ii) $\left.\begin{array}{l} F(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1/2x+1 \\ \text{dar } 2x-1/2x-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow 2x-1/2\Leftrightarrow 2x-1\in\{-2;-1;1;2\},\ x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{0;1\}$ 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Problema 2.

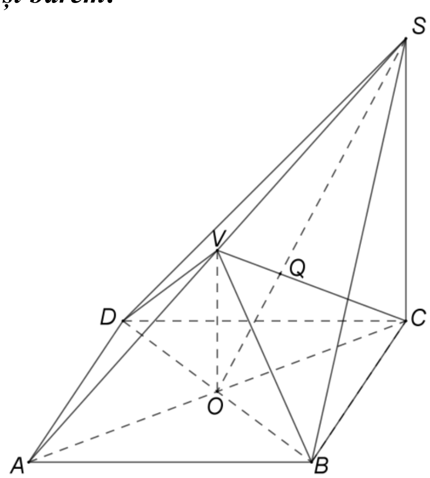
Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ a cărei înălțime VO este cât jumătate din muchia bazei. Știind că punctul S este simetricul punctului A față de V, demonstrați că:

a) dreapta SC este paralelă cu planul (VBD);

b) dreapta CV este perpendiculară pe planul (SBD).

(*Claudiu-Ștefan Popa și Gabriela Popa*)

Soluție și barem:



a) $VABCD$ este piramidă regulată și $AC \cap BD = \{O\}$, rezultă că O este mijlocul lui $[AC]$.

Din ipoteză, V este mijlocul lui $[AS]$, deci (VO) este linie mijlocie în ΔSAC și astfel $VO \parallel SC$.

Deoarece $VO \parallel SC$ și $VO \subset (VBD)$, rezultă că $SC \parallel (VBD)$ ……...............................……………………......3p

b) Deoarece (VO) este linie mijlocie în ΔSAC, rezultă că $VO = \frac{SC}{2} = \frac{AB}{2}$, deci $SC = AB = BC = CD$.

Cum $SC \parallel VO$ și $VO \perp (ABC) \Rightarrow SC \perp (ABC) \Rightarrow SC \perp BC, SC \perp CD$.

Deoarece $\Delta CBS \equiv \Delta CDS \equiv \Delta CBD (C.C.)$, rezultă că $(BS) \equiv (DS) \equiv (BD)$.

Din ipoteză $(VA) \equiv (VS) \equiv (VD) \equiv (VB)$, prin urmare piramidele $VBDS$ și $CBDS$, cu vârfurile în V, respectiv C sunt piramide regulate…..…………………………………..2p

Fie Q centrul triunghiului echilateral SBD. Deoarece $VBDS$ este piramidă regulată, rezultă că $VQ \perp (BDS)$.

Deoarece $CBDS$ este piramidă regulată, rezultă că $CQ \perp (BDS)$.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Ținând cont de unicitatea perpendicularei dusă printr-un punct pe un plan, rezultă că V, Q, C sunt puncte coliniare, deci $CV \perp (SBD)$ ……………………………………..………..2p

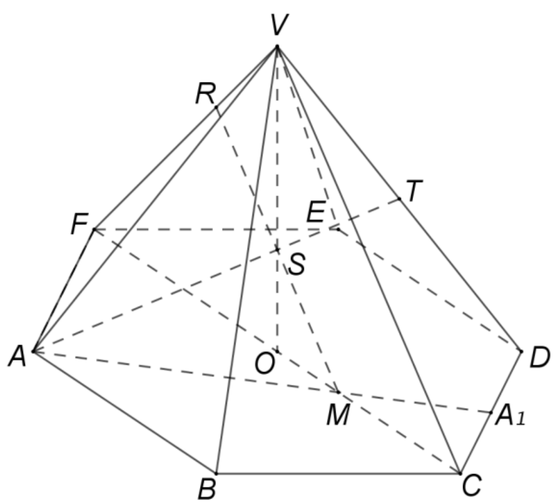
Problema 3.

Se consideră piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ de vârf V, în care A_1 este mijlocul lui $[CD]$, O este centrul bazei, $AA_1 \cap CF = \{M\}$ și $R \in [VF]$ astfel încât $2VF = 3FR$. Demonstrați că:

a) dreptele AC și VE sunt perpendiculare;
b) dreapta RM este paralelă cu planul (VBC);
c) RM, AT și VO sunt drepte concurente, T fiind mijlocul lui $[VD]$.

(*Dorel Luchian*)

Soluție și barem:



a) Deoarece $ABCDEF$ este hexagon regulat de centru O, rezultă că $ABCO$ este romb, deci $AC \perp OB = OE$. Piramida $VABCDEF$ fiind regulată, rezultă că $VO \perp AC$.
Așadar $AC \perp (VOE)$, iar $VE \subset (VOE)$, deci $AC \perp VE$ …..………...………..2p

b) În ΔADC punctul M este centrul de greutate, deci $\frac{CM}{MO} = 2 \Rightarrow \frac{FM}{CM} = 2.$

Din ipoteză, deducem că $\frac{FR}{RV} = 2,$ astfel că, pe baza reciprocei teoremei lui Thales în ΔCFV, se obține $RM \parallel CV$. Deoarece $CV \subset (VBC)$, rezultă că $RM \parallel (VBC)$ ……………….……..…...…………………..3p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

c) În ΔCFV, fie $\{S\} = VO \cap MR$. Cum $SM \parallel CV$, folosind teorema lui Thales, se obține că $VS = 2SO$.
În ΔVAD, S este centrul de greutate și AT este mediană, deci dreptele RM, AT și VO sunt concurente în S..2p

Problema 4.

Se consideră numerele reale x și y. Demonstrați că:

a) $x + y = xy$ dacă și numai dacă există un număr real nenul a astfel încât $x = 1 + a$ și $y = 1 + \frac{1}{a}$;

b) dacă $x + y = xy$, atunci $x + y \le 0$ sau $x + y \ge 4$.

(*Claudiu-Ștefan Popa*)

Soluție și barem:

a) $\Rightarrow$:

Cum $x + y = xy \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y$; observăm că $y \ne 1$, căci, dacă

$y = 1 \Rightarrow x + 1 = x \cdot 1 \Rightarrow 1 = 0$ (F). Prin urmare $x(y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y-1}$.

Cum $y = 1 + (y-1)$, alegem $a = \frac{1}{y-1}$ 2p

$:\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = (1+a) + \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 2 + a + \frac{1}{a}, a \ne 0 \\ xy = (1+a)\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1 + \frac{1}{a} + a + 1 = 2 + a + \frac{1}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = xy$$ 2p

b) Dacă $x + y = xy$, conform a), există $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x = 1 + a$ și $y = 1 + \frac{1}{a}$.

- dacă $a > 0$, avem $a + \frac{1}{a} \ge 2$, căci $\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \ge \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \Leftrightarrow \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \ge 1$, cu „=” $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1$, deci

  $x + y = 2 + a + \frac{1}{a} \ge 2 + 2 \Rightarrow x + y \ge 4$, cu „=” $\Leftrightarrow x = y = 2$ 2p

- dacă $a < 0$, avem $(-a) + \frac{1}{(-a)} \ge 2 \Leftrightarrow -\left(a + \frac{1}{a}\right) \ge 2 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \le -2$, cu „=” $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = -1$,

  deci $x + y = 2 + a + \frac{1}{a} \le 2 - 2 \Rightarrow x + y \le 0$, cu „=” $\Leftrightarrow x = y = 0$ 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro