



Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a XI-a
Barem de corectare

Problema 1.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- a) Determinați numerele reale a și b , știind că $A^2 = aA + bI_3$.
b) Determinați numerele reale x și y astfel încât $A^{2020} + A^{2019} = xA + yI_3$.

Soluție și barem.

- a) $a = 1$ și $b = 2$. (3p)
b) Conform punctului a) , avem $A^2 + A = 2(A + I_3)$. Prin inducție, deducem de aici că $A^{n+1} + A^n = 2^n(A + I_3)$, pentru orice număr întreg pozitiv n . Deci, $x = y = 2^{2019}$. (4p)

Problema 2.

- a) Demonstrați că, oricare ar fi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea:
$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2.$$

b) Găsiți o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $B^2 = 7I_2$.
c) Demonstrați că, dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ are proprietatea $\det(X^2 - 7I_2) = 0$, atunci $X^2 = 7I_2$.

Soluție și barem.

- a) Egalitatea cerută se poate demonstra prin calcul. (2p)
b) Căutăm $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât $a + d = 0$ și $ad - bc = -7$. O soluție este
 $a = 1, d = -1, b = 2$ și $c = 3$, deci $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. (2p)
c) Din relația $\det(X^2 - 7I_2) = 0$, rezultă că $\det(X - \sqrt{7}I_2)\det(X + \sqrt{7}I_2) = 0$, deci
 $\det(X - \sqrt{7}I_2) = 0$ sau $\det(X + \sqrt{7}I_2) = 0$. Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Se observă că



$$\det(X \pm \sqrt{7}I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x \pm \sqrt{7} & y \\ z & t \pm \sqrt{7} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (xt - yz) \pm (x+t)\sqrt{7} = -7,$$

de unde, având în vedere că x, y, z și t sunt numere raționale, obținem $xt - yz = -7$ și $x + t = 0$, deci $X^2 = 7I_2$. (3p)

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$.

a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(x_n - \frac{1}{2} \right)$.

Soluție și barem.

a) Deoarece $x_n \geq \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n} = \frac{1}{2}$ și $x_n \leq \frac{1+2+\dots+n}{n^2+1} = \frac{n^2+n}{2(n^2+1)}$, pentru orice număr

întreg pozitiv n , iar $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$. (4p)

b) Avem:

$$\begin{aligned} x_n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2} \right) + \left(\frac{2}{n^2+2} - \frac{2}{n^2} \right) + \dots + \left(\frac{n}{n^2+n} - \frac{n}{n^2} \right) + \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{n^2} \left(\frac{1^2}{n^2+1} + \frac{2^2}{n^2+2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n} \right) + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

$$\text{deci } n \left(x_n - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2+1} + \frac{2^2}{n^2+2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n} \right) + \frac{1}{2} = -y_n + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Deoarece } y_n \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2+n} = \frac{2n+1}{6n} \text{ și } y_n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)},$$

pentru orice număr întreg pozitiv n , iar $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{6n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n^2+1)} = \frac{1}{3}$, rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{3}. \text{ Prin urmare, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(x_n - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \text{ (3p)}$$

Problema 4.

Spunem că o funcție $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă f este crescătoare și

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

a) Demonstrați că funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ are proprietatea (P).

b) Demonstrați că, dacă f este o funcție cu proprietatea (P), atunci



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+a) - f(x+b)) = 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive a și b .

Soluție și barem.

a) Funcția f este crescătoare și $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$. (3p)

b) Fie f o funcție cu proprietatea (P) și n un număr natural. Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(x+n-1) + f(x+n-1) - f(x+n-2) + \dots \\ &\quad + f(x+1) - f(x)) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Cum funcția f este crescătoare, pentru orice număr real pozitiv a , are loc relația $f(x+[a]) - f(x) \leq f(x+a) - f(x) \leq f(x+[a]+1) - f(x)$. De aici, având în vedere

că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+[a]) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+[a]+1) - f(x)) = 0$, rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+a) - f(x)) = 0.$$

Așadar, avem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+a) - f(x+b)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+a) - f(x) - (f(x+b) - f(x))) = 0. \quad (4p)$$