Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a X-a
Barem de corectare

Problema 1.

a) Să se arate că $E_n = \log_n(n+1) + \log_{n+1} n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ nu este număr întreg și să se calculeze $[E_n]$ $(partea\ \hat{\imath}ntreag$ă);

b) Să se studieze monotonia șirului $(E_n)_{n\geq 2}$.

Soluție și barem:

a) Din inegalitatea mediilor avem $E_n > 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ …………………….……………………..…….. **1p**

$E_n = \log_n(n+1) + \log_{n+1} n < \log_n n^2 + \log_{n+1}(n+1) = 3$, deci $E_n \notin \mathbb{Z}$ și $[E_n] = 2$……..………… **1p**

b) Arată că $\log_n(n+1) > \log_{(n+1)}(n+2) \Leftrightarrow (\ln(n+1))^2 > \ln n \cdot \ln(n+2)$,

dar, $\ln n \cdot \ln(n+2) < \left(\frac{\ln n + \ln(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\ln\sqrt{n(n+2)}\right)^2 < (\ln(n+1))^2$……………..…….……………... **2p**

Arată că funcția $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$ este strict crescătoare……………..…………...…………..... **2p**

Finalizare, șirul $(E_n)_{n\geq 2}$ este strict descrescător………………………...…………………..…….……… **1p**

Problema 2.

Fie numerele complexe distincte a, b, c, d astfel încât $a + c = b + d$ și $a^2 + c^2 = 2bd$.

Să se arate că numerele date sunt afixele vârfurilor unui pătrat.

Soluție și barem:

Din $a + c = b + d$ rezultă că vârfurile asociate alcătuiesc un paralelogram …………...…………….….….. **1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

$a^2 + c^2 = 2bd \iff a^2 + (b + d - a)^2 = 2bd \iff (d - a)^2 + (b - a)^2 = 0$ ……................……………...... **4p**

Deci $\frac{d-a}{b-a} \in \{\pm i\}$, deci *a*, *b*, *d* sunt afixele unui triunghi dreptunghic isoscel……..………..…………....….. **2p**

Problema 3.

Fie a, b, c cele trei rădăcini complexe ale ecuației $x^3 - 1 = 0$ și $u, v, w \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$$u(v+w) = a,\ v(u+w) = b,\ w(v+u) = c.$$

a) Determinați *u*, *v*, *w*.

b) Determinați $n \in \mathrm{N}$ astfel încât $u^n + v^n + w^n = a^n + b^n + c^n$

Soluție și barem:

a) Avem: $\{a,b,c\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, de unde *a* + *b* + *c* = 0, iar *abc* = 1. Din $uv + uw = a$, $uv + vw = b$, $vw + uw = c$ obținem: $uv = -c$, $uw = -b$, $vw = -a$; $(uvw)^2 = -1 \Rightarrow uvw = \pm i$, de unde: $u = \pm\frac{i}{a}$, $v = \pm\frac{i}{b}$, $w = \pm\frac{i}{c}$

………...………………………………………………………………………………………… **3p**

b) $u^n + v^n + w^n = (\pm i)^n \left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}\right) = (\pm i)^n \left(1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n}\right)$.

Căutăm $n \in \mathbb{N}$ pentru care: $(\pm i)^n \left(1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n}\right) = 1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n}$.

Dacă *n* = 3*k*, $k \in \mathbb{N}$, atunci: $1 + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{6k} = 3$ și $(\pm i)^{3k} = 1 \Rightarrow k = 4p \Rightarrow n = 12p,\ p \in \mathbb{N}$.

Dacă *n* = 3*k* + 1, $k \in \mathbb{N}$, atunci: $1 + \varepsilon^{3k+1} + \varepsilon^{6k+2} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, relația este adevărată.

Dacă *n* = 3*k* + 2, $k \in \mathbb{N}$, atunci: $1 + \varepsilon^{3k+2} + \varepsilon^{6k+4} = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0$, relația este adevărată.

Astfel, $n \in \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{12k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ……………………………………………………… **4p**

Problema 4.

Să se arate că dacă $a, b, c \in (0,1)$, atunci:

a) $\log_a \frac{2bc}{b+c} \cdot \log_b \frac{2ca}{c+a} \cdot \log_c \frac{2ab}{a+b} \geq 1$

b) $\frac{1}{2 + \log_a b} + \frac{1}{2 + \log_b c} + \frac{1}{2 + \log_c a} \leq 1$.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Soluție și barem:

a) $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc} \Rightarrow \log_a \frac{2bc}{b+c} \ge \log_a\left(\sqrt{bc}\right)$ ………………………………………..……………………….. **1p**

$\log_a \frac{2bc}{b+c} \ge \frac{1}{2}\cdot\left(\log_a b + \log_a c\right) \ge \sqrt{\log_a b \cdot \log_a c}$ ……………………………………………………..……….. **1p**

Scriind încă două relații analoage, prin înmulțirea lor rezultă concluzia………………………………...…... **1p**

b) Notăm $\log_a b = x, \log_b c = y, \log_c a = z,\ \ x\cdot y\cdot z = 1$**,** iar inegalitatea devine

$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z} \le 1$, sau $\frac{x}{2+x}+\frac{y}{2+y}+\frac{z}{2+z} \ge 1$ ………………………………..……………………..… **1p**

Fie $x=\frac{u}{v}, y=\frac{v}{t}, z=\frac{t}{u}$, deci rămâne de arătat că: $\frac{u}{2v+u}+\frac{v}{2t+v}+\frac{t}{2u+t} \ge 1$

$$\frac{u}{2v+u}+\frac{v}{2t+v}+\frac{t}{2u+t} = \frac{u^2}{2uv+u^2}+\frac{v^2}{2vt+v^2}+\frac{t^2}{2ut+t^2} \ge \frac{\left(u+v+t\right)^2}{u^2+v^2+t^2+2uv+2vt+2tu},$$

conform inegalității lui Cauchy, forma Titu Andreescu.

Deci $\frac{u}{2v+u}+\frac{v}{2t+v}+\frac{t}{2u+t} \ge 1$,ceea ce trebuia demonstrat ……………………….…………………….... **3p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași, Județul IAȘI
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro