



Olimpiada Națională de Matematică 2020

Etapa locală – Iași

17 ianuarie 2020

CLASA a XII -a

Barem de corectare

Problema 1. Fie grupul finit (G, \cdot) de ordin n impar. Să se arate că funcția $f : G \rightarrow G$ cu proprietatea

$$f(xyz) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z), \forall x, y, z \in G \text{ este morfism.}$$

Soluție și barem:

Luăm $x = y = z = e$ și obținem $f^2(e) = e \dots\dots\dots 2p$

Cum $f^n(e) = e$ și n impar, rezultă $f(e) = e \dots\dots\dots 2p$

Pentru $z = e$ se obține $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, deci f este morfism.....3p

Problema 2. Fie G o submulțime nevidă finită de numere complexe nenule. Se știe că înmulțirea este lege

de compoziție pe mulțimea G . Demonstrați ca orice element din G are modulul egal cu 1

și

$$1 \in G.$$

Soluție și barem:

Dacă $z \in G \Rightarrow z^n \in G \dots\dots\dots 1p$

Dacă $|z| > 1$ vom avea că mulțimea G este infinită1p

Dacă $|z| < 1$ vom avea ca mulțimea G este infinită1p

Fie $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și $x \in G$. Avem $G = \{xx_1, xx_2, \dots, xx_n\}$. De aici deducem că $x = xx_k$

.....3p

Ținând cont că $x \neq 0 \Rightarrow x_k = 1 \dots\dots\dots 1p$

Problema 3. Fie funcția $f_\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{\ln x}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$. Determinați numărul real α , astfel

încât funcția f_α să admită primitive pe $(0, +\infty)$.



Soluție și barem:

Fie G o primitivă a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ **2p**

Notăm $F(x) = G(\ln x), x > 0 \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} g(\ln x) = f_0(x), \forall x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, adică

F este o primitivă a lui f_0 **2p**

Dacă există $\alpha \neq 0$ astfel încât f_α să admită primitive, atunci $f_\alpha - f_0$ admite primitive.

Dar $(f_\alpha - f_0)(x) = \begin{cases} 0, x \neq 1 \\ \alpha, x = 1 \end{cases}$ nu admite primitive, absurd! **2p**

În concluzie, f admite primitive $\Leftrightarrow \alpha = 0$ **1p**

Problema 4. a) Determinați o relație de recurență pentru șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, unde $I_n = \int \frac{\cos(nx)}{\sin x} dx, n \geq 1$ și

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Calculați $J_n = \int \sin(nx) \cdot \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) dx, n \geq 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție și barem:

$$\text{a) } \cos nx = \cos[(n-2)x + 2x] = \cos(n-2)x \cos 2x - \sin(n-2)x \sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos nx = \cos(n-2)x \cdot (1 - 2\sin^2 x) - \sin(n-2)x \cdot 2\sin x \cos x \quad \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$\text{Obținem } I_n = I_{n-2} - 2 \int [\cos(n-2)x \sin x + \sin(n-2)x \cos x] dx = I_{n-2} - 2 \int \sin(n-1)x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = I_{n-2} + \frac{2}{n-1} \cos(n-1)x, \forall n \geq 3, \text{ cu} \quad \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$I_1 = \ln(\sin x) + C, I_2 = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C \quad \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{b) } J_n = \int \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{n} \cos nx\right) dx = -\frac{1}{n} \cos nx \cdot \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{n} \int \frac{\cos nx}{\sin x} dx \quad \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$J_n = -\frac{1}{n} \cos nx \cdot \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{n} I_n, n \geq 2 \quad \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$