



Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a VII-a
Barem de corectare

Problema 1.

Fie $A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \dots + \sqrt{1+3+5+\dots+8077}$. Arătați că \sqrt{A} este un număr natural.

Soluție și barem:

Vom folosi faptul că $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$, oricare ar fi numărul natural nenul n . **(3p)**

Obținem că $A = \sqrt{1} + \sqrt{3^2} + \sqrt{5^2} + \dots + \sqrt{4039^2} = 1+3+5+\dots+4039 = 2020^2$. **(3p)**

De aici, $\sqrt{A} = 2020$ este număr natural. **(1p)**

Problema 2.

Se consideră trapezul isoscel $ABCD$. Diagonalele trapezului se intersectează în O , iar M este simetricul punctului B față de O . Demonstrați că dreptele AC și BD sunt perpendiculare dacă și numai dacă dreptele AD și MC sunt perpendiculare.

Claudiu-Ștefan Popa

Soluție și barem:

Deoarece trapezul $ABCD$ este isoscel, avem că $AO = BO$. Dar $BO = OM$, prin urmare mediana AO a triunghiului ABM este egală cu jumătatea laturii pe care cade. Deducem că $\widehat{MAB} = 90^\circ$ și, cum $AB \parallel CD$, urmează că $CD \perp AM$. **(3p)**

Presupunem că dreptele AC și BD sunt perpendiculare; atunci MO și CD sunt înălțimi în triunghiul AMC . Punctul D va fi ortocentrul acestui triunghi, iar AD va fi cea de-a treia înălțime, așadar dreptele AD și MC sunt perpendiculare. **(2p)**

Reciproc, presupunem că dreptele AD și MC sunt perpendiculare. Rezultă că AD și CD sunt înălțimi în triunghiul AMC . Punctul D va fi ortocentrul acestui triunghi, iar MO va fi cea de-a treia înălțime, așadar dreptele AC și BD sunt perpendiculare. **(2p)**



Problema 3.

Se consideră triunghiul ABC , având aria 360 cm^2 . Pe laturile BC și CA se consideră punctele T , respectiv S , așa încât $BT = 2 \cdot TC$ și $CS = 3 \cdot SA$. Dreptele AT și BS se intersectează în punctul P . Aflați aria patrulaterului $CTPS$.

Soluție și barem:

Se arată că aria triunghiului ATC este 120 cm^2 , iar aria triunghiului BSC este 270 cm^2 . **(2p)**

Notăm cu a și b ariile triunghiurilor APS , respectiv CPT ; atunci aria triunghiului CPS va fi $3a$, iar aria triunghiului BPT va fi $2b$. **(2p)**

Rezultă că $4a + b = 120$ și $3a + 3b = 270$, de unde $a = 10$, $b = 80$. Astfel, aria patrulaterului $CTPS$ (egală cu $3a + b$) este 110 cm^2 . **(3p)**

Problema 4.

Pe o masă se află 107 cartonașe roșii, 105 albastre, 103 verzi și 101 galbene. O mutare înseamnă alegerea a trei cartonașe de culori diferite și vopsirea lor în cea de-a patra culoare. Este posibil ca, după un număr de mutări, toate cartonașele să devină la fel colorate?

Ioan-Viorel Codreanu

Soluție și barem:

Răspunsul este NU. **(1p)**

După o mutare, numărul cartonașelor de o anumită culoare fie se micșorează cu 1, fie crește cu 3. **(2p)**

Diferența dintre numărul cartonașelor roșii și numărul celor albastre fie rămâne aceeași, fie scade cu 4, fie crește cu 4. **(2p)**

Inițial, această diferență este egală cu 2, număr care nu se divide cu 4. În urma unui număr de mutări, ea nu are cum să ajungă nici 0 (cum ar trebui să fie dacă la final toate cartonașele ar deveni verzi sau galbene), nici ± 416 (cum ar trebui să fie dacă la final toate cartonașele ar deveni roșii sau albastre), deoarece 0 și ± 416 sunt numere divizibile cu 4. **(2p)**