Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a XI-a

Problema 1.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Determinați numerele reale *a* și *b*, știind că $A^2 = aA + bI_3$.

b) Determinați numerele reale *x* și *y* astfel încât $A^{2020} + A^{2019} = xA + yI_3$.

Problema 2.

a) Demonstrați că, oricare ar fi matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2.$$

b) Găsiți o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $B^2 = 7I_2$.

c) Demonstrați că, dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ are proprietatea $\det(X^2 - 7I_2) = 0$, atunci $X^2 = 7I_2$.

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(x_n - \dfrac{1}{2}\right)$.

Problema 4.

Spunem că o funcție $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ are prorietatea (P) dacă *f* este crescătoare și $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$.

a) Demonstrați că funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ are proprietatea (P).

b) Demonstrați că, dacă *f* este o funcție cu proprietatea (P), atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+a) - f(x+b)\big) = 0,$$

oricare ar fi numerele reale pozitive *a* și *b*.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro