



Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a X -a

Problema 1.

- a) Să se arate că $E_n = \log_n(n+1) + \log_{n+1} n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ nu este număr întreg și să se calculeze $[E_n]$ (partea întreagă);
- b) Să se studieze monotonia șirului $(E_n)_{n \geq 2}$.

Problema 2.

Fie numerele complexe distincte a, b, c, d astfel încât $a + c = b + d$ și $a^2 + c^2 = 2bd$.

Să se arate că numerele date sunt afixele vârfurilor unui pătrat.

Problema 3.

Fie a, b, c cele trei rădăcini complexe ale ecuației $x^3 - 1 = 0$ și $u, v, w \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$$u(v+w) = a, \quad v(u+w) = b, \quad w(v+u) = c.$$

- a) Determinați u, v, w .
- b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $u^n + v^n + w^n = a^n + b^n + c^n$

Problema 4.

Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 1)$, atunci:

- a) $\log_a \frac{2bc}{b+c} \cdot \log_b \frac{2ca}{c+a} \cdot \log_c \frac{2ab}{a+b} \geq 1$
- b) $\frac{1}{2 + \log_a b} + \frac{1}{2 + \log_b c} + \frac{1}{2 + \log_c a} \leq 1$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.