



Olimpiada Națională de Matematică 2020
Etapa locală – Iași

CLASA a VIII-a

Problema 1.

- a) Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 13, c^2 + d^2 = 7$ și $ab = cd = 2\sqrt{3}$, să se demonstreze că $\frac{11}{|a-b|} + \frac{2}{|c+d|} \in \mathbb{Q}$.
- b) Se consideră fracția $F(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$, unde $x \in \mathbb{Z}$.
- i) Arătați că $F(x)$ se poate simplifica prin numărul $x^2 - x + 1$.
- ii) Determinați valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $F(x) \in \mathbb{Z}$.

Problema 2.

Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ a cărei înălțime VO este cât jumătate din muchia bazei. Știind că punctul S este simetricul punctului A față de V , demonstrați că:

- a) dreapta SC este paralelă cu planul (VBD) ;
- b) dreapta CV este perpendiculară pe planul (SBD) .

Problema 3.

Se consideră piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ de vârf V , în care A_1 este mijlocul lui $[CD]$, O este centrul bazei, $AA_1 \cap CF = \{M\}$ și $R \in [VF]$ astfel încât $2VF = 3FR$. Demonstrați că:

- a) dreptele AC și VE sunt perpendiculare;
- b) dreapta RM este paralelă cu planul (VBC) ;
- c) RM, AT și VO sunt drepte concurente, T fiind mijlocul lui $[VD]$.



Problema 4.

Se consideră numerele reale x și y . Demonstrați că:

- a) $x + y = xy$ dacă și numai dacă există un număr real nenul a astfel încât $x = 1 + a$ și $y = 1 + \frac{1}{a}$;
- b) dacă $x + y = xy$, atunci $x + y \leq 0$ sau $x + y \geq 4$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.