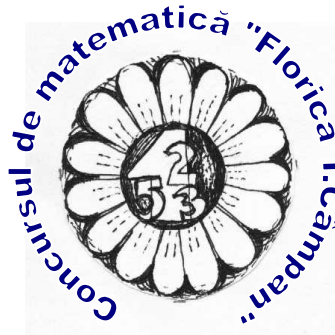


CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
EDIȚIA A X-A
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 17 APRILIE 2010



Clasa a VII-a
BAREM

SUBIECTUL I

Din oficiu **2p**

Găsește un exemplu de trei numere iraționale, astfel încât produsele de câte două să fie numere raționale, de exemplu $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{2}$. **3p**

Trage concluzia că implicația este falsă pentru înmulțire. **2p**

Reformulează problema pentru adunare. **2p**

$a + b \in \mathbb{Q}$, $a + c \in \mathbb{Q}$, $b + c \in \mathbb{Q}$ implică $a + b + c \in \mathbb{Q}$ iar de aici rezultă că $a, b, c \in \mathbb{Q}$. **4p**

Finalizare **2p**

SUBIECTUL II

Din oficiu **2p**

În 1h, primul muncitor efectuează $\frac{1}{2a}$ din lucrare

al doilea muncitor efectuează $\frac{1}{2b}$ din lucrare. **2p**

În 1h, prima echipă efectuează $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{a+b}{2ab}$ din lucrare. **2p**

În 1h, al treilea muncitor efectuează $\frac{1}{a+b}$ din lucrare

al patrulea muncitor efectuează $\frac{1}{a+b}$ din lucrare. **1p**

În 1h, a doua echipă efectuează $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+b}$ din lucrare. **2p**

$\frac{a+b}{2ab}$ și $\frac{2}{a+b}$ reprezintă inversele mediilor armonică, respectiv, aritmetică a numerelor a și b . **2p**

Cum $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$, pentru $a \neq b$, reprezintă inegalitatea între mediile armonică și aritmetică rezultă că

$\frac{a+b}{2ab} > \frac{2}{a+b}$. **3p**

Concluzia: prima echipă termină lucrarea prima. **1p**

Observație! Dacă $\frac{2ab}{a+b}$ și $\frac{a+b}{2}$ nu sunt numite ca mediile armonică, respectiv, aritmetică, atunci inegalitatea

$\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$ trebuie demonstrată.

SUBIECTUL III

Din oficiu **2p**

a) Din paralelograme observă că P, Q, R, S sunt mijloacele segmentelor OA, OB, OC, OD . **2p**

Folosește, în mod adecvat, liniile mijlocii. **3p**

b) i) Arată că $AEBO$ și $CFDO$ sunt paralelograme. **1p**

Arată că $SP \parallel FO$ și $RQ \parallel FO$, de unde $SP \parallel RQ$. **1p**

Arată că $SP = \frac{2a \cdot NO}{a+b}$ și $RQ = \frac{2a \cdot NO}{a+b}$, unde am notat $a = AB$ și $b = CD$, de unde $SP = RQ$. **1p**

Finalizare. **1p**

ii) Arată că $SP = RQ = \frac{2a \cdot NO}{a+b} = \frac{2b \cdot MO}{a+b}$.

Demonstrează că punctele M, O, N sunt coliniare.

Arată că $AB \parallel PQ \parallel SR \parallel CD$.

Arată că $PQ = SR = \frac{ab}{a+b}$. **1p**

Demonstrează că $NO = \frac{b \cdot MN}{a+b}$ sau $MO = \frac{a \cdot MN}{a+b}$.

Arată că $P_{PQRS} = \frac{2ab}{a+b} + 2 \cdot \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{MN}{a+b}$.

Arată că $P_{PQRS} \leq \frac{a+b}{2} + MN$, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b$, adică $ABCD$ este paralelogram.

Folosește că $MN \leq \frac{BC + AD}{2}$, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b$, și arată că $P_{PQRS} \leq \frac{P_{ABCD}}{2}$. **2p**

Arată că $A_{PQRS} \leq \frac{A_{ABCD}}{4}$, cu egalitate dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram. **1p**

