

Olimpiada Națională de Matematică 2024

Etapa locală - Iași, 2 februarie 2024

Clasa a V – a

Barem de notare și evaluare

Notă:

- Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Punctajul total reprezintă suma punctajelor celor 4 probleme.
- Orice altă soluție corectă și completă va fi notată cu punctajul maxim.

Problema 1.

Fie $n = (7^{2005} : 7^{200} + 3^7) : (7^{1805} + 3^{2005} : 3^{1998}) - (a^{72})^2 : (a^{12})^{12} + 7^{2024}$.

- Arătați că n este pătrat perfect.
- Determinați ultimele 4 cifre ale numărului n .

Soluție:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } n &= (7^{1805} + 3^7) : (7^{1805} + 3^7) - a^{144} : a^{144} + 7^{2024} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= 1 - 1 + 7^{2024} = 7^{2024} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= (7^{1012})^2 \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 \text{b) } n &= (7^4)^{506} = 2401^{506} = (2400 + 1)^{506} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= \underbrace{(2400 + 1) \cdot (2400 + 1) \cdot \dots \cdot (2400 + 1)}_{506} \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= M_{2400^2} + 506 \cdot 2400 + 1 \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= M_{10000} + 4401 \dots\dots\dots 1\text{p}
 \end{aligned}$$

Problema 2.

Fie numărul $A = 123\dots 91011\dots 20232024$ format prin alăturarea numerelor 1, 2, 3, ..., 2023, 2024.

- Aflați câte cifre are numărul A .
- Aflați câte cifre de 5 are numărul A .
- Aflați restul împărțirii numărului A la 64.

Soluție:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1025 \cdot 4 \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= 9 + 180 + 2700 + 4100 \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= 6989 \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 \text{b) } &\text{Notăm numerele de la 0 la 1999 cu } \overline{abcd}, a = 0 \text{ sau } 1; b, c, d \text{ de la } 0 \text{ la } 9 \text{ (completarea} \\
 &\text{cu zerouri nu influențează apariția lui 5) : } 0000, 0001, \dots, 1999. \\
 &\text{Avem 5 la unități de } 2 \times 10 \times 10 = 200 \text{ de ori } \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &\text{la zeci de } 2 \times 10 \times 10 = 200 \text{ de ori} \\
 &\text{la sute de } 2 \times 10 \times 10 = 200 \text{ de ori} \\
 &\quad 600 \text{ apariții} \\
 &2000 \rightarrow 2024 \text{ de 2 ori } \Rightarrow 602 \text{ ori } \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 \text{c) } &64 = 2^6 \\
 &A = M_{1000000} + 232024 \dots\dots\dots 1\text{p} \\
 &= M_{64} + 232000 + 24 \\
 &= M_{64} + 24, r=24 \dots\dots\dots 1\text{p}
 \end{aligned}$$

Problema 3.

Luca și Matei încep să lucreze la firma tatălui lor, fiind plătiți astfel: Luca primește 30 de lei pentru prima zi și apoi o sumă cu 16 lei mai mare în fiecare zi decât în precedenta, iar Matei primește 1 leu în prima zi și apoi dublu în fiecare zi față de precedenta.

a) Aflați câți lei primește fiecare pentru primele 10 zile de muncă.

b) Aflați numărul minim de zile de muncă pe care trebuie să le presteze Matei pentru a deveni „milionar”, adică să primească o sumă de cel puțin un milion de lei.

Soluție:

a) Luca

$$s_1 = 30 + 46 + 62 + \dots + 174 = (30 + 174) \times 10 : 2 = 1020 \dots\dots\dots 1p$$

Matei

$$s_2 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023 \dots\dots\dots 1p$$

b) Pentru n zile, Matei primește:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$= 2^n - 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$2^n - 1 \geq 1000000$$

$$2^n \geq 1000001 \dots\dots\dots 1p$$

$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} > 1000001 \dots\dots\dots 1p$$

$$2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 < 1000000$$

$$n = 20 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4.

Un biciclist își propune să parcurgă un traseu în 3 zile. În prima zi parcurge un sfert din traseu și apoi se întoarce 5 km pentru un loc de popas. A doua zi parcurge $\frac{2}{5}$ din distanța rămasă și iar se întoarce 4 km pentru cazare. În a treia zi constată că are de parcurs jumătate din lungimea totală a traseului. Ce lungime are traseul?

Soluție: Lungime traseu 20x

$$\text{Prima zi: merge } 5x, \text{ se întoarce } 5 \text{ km} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rămân } 15x + 5 \text{ km} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{A doua zi: merge } 6x + 2 \text{ km, se întoarce } 4 \text{ km} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rămân } 9x + 3 + 4 \text{ km} \dots\dots\dots 1p$$

$$9x + 7 = 10x \dots\dots\dots 1p$$

$$x = 7 \dots\dots\dots 1p$$

$$d = 140 \text{ km} \dots\dots\dots 1p$$